

## 類別式としてのオイラー標数について

間宮精一

筑波大学数理物質科学等支援室 (物性・分子工学専攻)  
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

### 概要

私が常々興味を抱いているものの一つをここに紹介する。それは、高等数学でありながら、その導入部分は日常生活に見られる簡単な図形で始まり、又、式は3つの整数の和と差だけしか出てこない、このアンバランスさに大変好奇心を掻き立てられた。何故だろう？こんなことから何が導き出されるのだろうか？これがこの理論を学ぶ切っ掛けとなった。

私たちは、中学校で図形の合同と相似について学習した。日常生活において前者は紙幣のように全く同じものと、後者は獲物が遠くから近づいてくる時、同一の物であると認識することに対応している。

更に、これから示すことは、図形の構造的な違いだけに重点を置いた類別についてである。具体的には顔の表情が刻々と変化していても、同一人物であると認識することに対応している。

オイラー標数  $\chi(\mathbf{R}) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$  を使うと、比較的簡単にある特徴を持つ図形の類別が出来る。例えば、2次元凸多角形の場合、オイラー標数  $\chi(\mathbf{R}) = 1$  となる、そして3次元凸多面体の場合、オイラー標数  $\chi(\mathbf{R}) = 2$  となる。このように、具体的に図形の頂点、辺、面の数を式に代入するだけで不変的な量が得られる (図1)。

このような解り易い形態で不変量と類についての関係が見られることは稀なことである。

この事実はオイラーにより発見された。そして、ポアンカレが群の理論を導入し、オイラー標数は  $n$  次元まで拡張されオイラー-ポアンカレの公式として表された。これがホモロジー論と呼ばれているものである。ここでホモロジー論について簡単に述べると、ある図形の面、辺、頂点それぞれ別々に数式化し、面と辺、辺と頂点それぞれの間に境界(変換)を定義する (図2)。この定義により面の境界が辺の集合に対応され、辺の境界が頂点の集合に対応され、更に両者の関係が明らかになる。

そして、それぞれの群について適切な演算を行えば有効な利用が出来る。

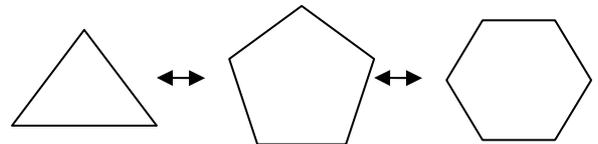
全体を大きく俯瞰(ふかん)すれば、定義が厳格でなく緩くなればなるほど図形の仲間が増えることが分かる。

ここでは、群の知識を使わず、初等数学でオイラー標数 (3次元凸多面体) について証明し、球に対しても成立することを示す。シュタイナーの証明など

いろいろな方法があるが、ここではルジャンドルの証明を用いる。

このホモロジー論の応用として、半導体の回路設計、ホモロジー解析 (ホモロジーモデリングにより立体構造が知られていない蛋白質の構造を予測できる)、ホモロジー検索、ホモロジー類を計算することによって物体の形状の特徴を掴むことが出来る。

$\chi(\mathbf{R})=1$



$\chi(\mathbf{R})=2$

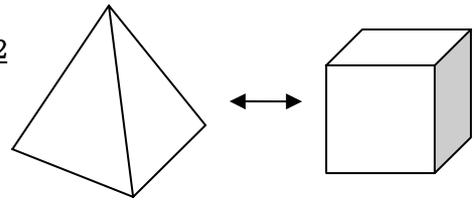
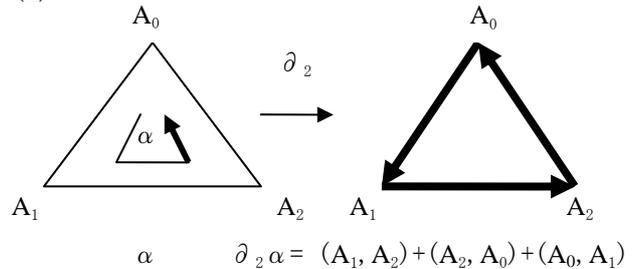


図1. オイラー標数の等しい図形の例

(1)



(2)

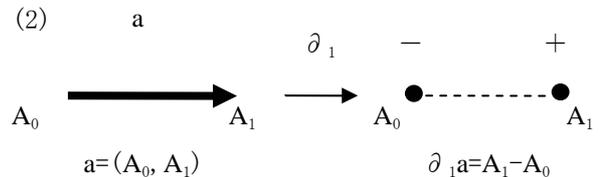


図2. 境界(変換)

- (1) 方向付けられた面  $\alpha$  から方向付けられた辺  $\partial_2 \alpha$  への変換。
- (2) 方向付けられた辺から方向付けられた頂点  $\partial_1 a$  への変換。

# 1. はじめに

オイラーの定理(3次元凸多面体)について証明する。

## オイラーの定理

$\Gamma$ を空間 $E^{(3)}$ 内の任意の凸多面体とする。

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \cdots \Gamma \text{の頂点の個数} \\ \mu \cdots \Gamma \text{の辺の個数} \\ \nu \cdots \Gamma \text{の面の個数} \end{array} \right\} \quad (1)$$

とおくと、そのとき

$$\lambda - \mu + \nu = 2 \cdots (2)$$

が成り立つ

オイラーの定理を証明するために次の準備をする。

### 補題1

球面三角形  $ABC$  において、その面積を  $\triangle ABC$  で表すとき

$$\angle A + \angle B + \angle C = \triangle ABC + \pi \cdots (3)$$

補題1の証明

$S$ を半径1の球面とする。一般に、この球の中心を通る平面によって球面を切って得られる球面の切り口を大円という。二つの大円のなす角  $\theta$  は、図3によって定義される。球面  $S$  上で、3個の大円によって囲まれた部分を球面三角形という(図4)。

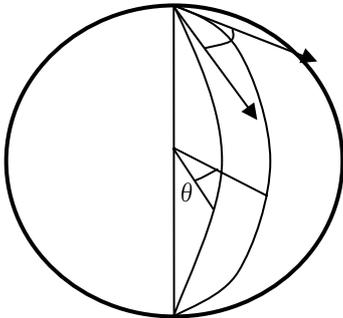


図3. 二つの大円のなす角  $\theta$

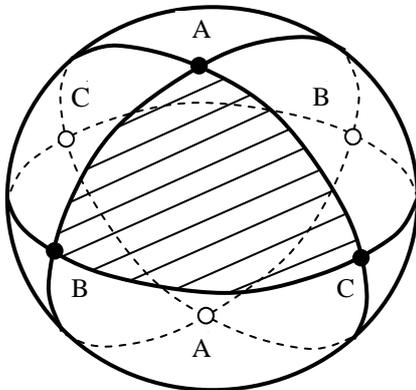


図4. 球面三角形

## 弓形の部分の面積 $\alpha$

$$\alpha = (\text{球の表面積}) \times \theta / (2\pi)$$

$$= 4\pi \times 1^2 \times \theta / (2\pi) = 2\theta \cdots (4)$$

$$2\angle A = \triangle ABC + \triangle ACB \cdots (5)$$

$$2\angle B = \triangle ABC + \triangle BAC \cdots (6)$$

$$2\angle C = \triangle ABC + \triangle CBA \cdots (7)$$

ここで (5)+(6)+(7) より

$$\begin{aligned} & 2(\angle A + \angle B + \angle C) \\ &= 3\triangle ABC + \triangle ACB + \triangle BAC + \triangle CBA \\ &= 2\triangle ABC + \underline{\triangle ABC} + \underline{\triangle ACB} + \underline{\triangle BAC} + \underline{\triangle CBA} \\ &= 2\triangle ABC + 2\pi \quad (\text{下線部分は半球の表面積}) \end{aligned}$$

$$2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2\triangle ABC + 2\pi$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \triangle ABC + \pi$$

となり補題1を得る。

### 補題2

球面凸  $n$  辺形  $A_1A_2 \cdots A_n$  において、その面積を  $\square(A_1A_2 \cdots A_n)$  で表すとき(図5)

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \cdots + \angle A_n = \square(A_1A_2 \cdots A_n) + (n-2)\pi \cdots (8)$$

補題2の証明

球面凸  $n$  辺形  $A_1A_2 \cdots A_n$  は、球面三角形  $(n-2)$  個に分割される。

補題1を  $(n-2)$  個の球面三角形に適用し、その和をとれば、補題2が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle A_3A_1A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_1 = \triangle A_1A_2A_3 + \pi \\ \angle A_4A_1A_3 + \angle A_1A_3A_4 + \angle A_3A_4A_1 = \triangle A_1A_3A_4 + \pi \\ \angle A_5A_1A_4 + \angle A_1A_4A_5 + \angle A_4A_5A_1 = \triangle A_1A_4A_5 + \pi \\ \vdots \\ \angle A_nA_1A_{n-1} + \angle A_1A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 = \triangle A_1A_{n-1}A_n + \pi \end{array} \right.$$

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \cdots + \angle A_{n-1} + \angle A_n = \square(A_1A_2 \cdots A_n) + (n-2)\pi$$

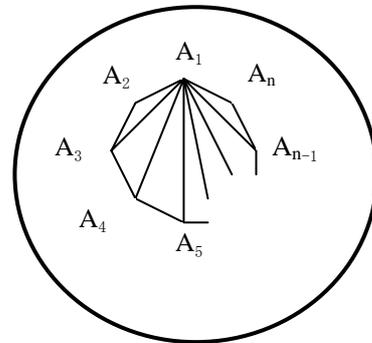


図5. 球面凸  $n$  角形

オイラーの定理の証明(ルジャンドルの方法)

与えられた凸多面体  $\Gamma$  の内部に 1 点  $O$  を取る。  
 $O$  を中心として、半径 1 の球面  $S$  を作る。  
 $\Gamma$  の表面上の各点  $P$  に対して  $OP$  を結ぶ半直線を作り、  
 これと  $S$  との交わりを  $Q$  とする。  
 この写像

$$\phi : P \rightarrow Q$$

を  $\Gamma$  の表面から球面  $S$  への射影という。

射影  $\phi$  によって、 $\Gamma$  の辺は  $S$  上の大円の弧に写像される。かくして、 $\Gamma$  の表面の射影として、球面  $S$  の球面凸多角形への分割  $\Delta$  を生じる(図 6)。

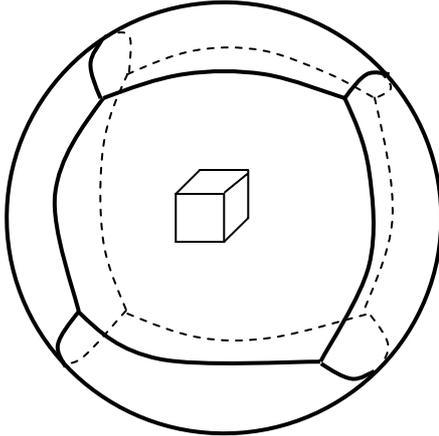


図 6. 六面体の球面への射影

特に、 $\Gamma$  が凸多面体であることから  $\Gamma$  の頂点、辺、面が射影  $\phi$  によって球面の分割  $\Delta$  の頂点、辺、面にそれぞれ一対一に対応する。したがって  $\Delta$  の頂点、辺、面の個数も、やはり  $\lambda, \mu, \nu$  である。球面の分割  $\Delta$  において、その面(球面多角形)を

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$$

とし

$$\alpha_i \text{ の頂点を } A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i n_i}$$

$$\alpha_i \text{ の辺を } a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i n_i}$$

とおく。

$\Delta$  における一つの頂点は、幾つかの面  $\alpha_i$  の頂点として重複して数えられ、また、 $\Delta$  における一つの辺はちょうど二つの面  $\alpha_i, \alpha_j$  の共通の辺として二重に数えられる。

式(8)を  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, \nu$ ) について作り

$$\angle A_{i1} + \angle A_{i2} + \dots + \angle A_{i n_i} = (\alpha_i \text{ の面積}) + (n_i - 2) \pi \quad \dots (9)$$

これを  $i=1, 2, \dots, \nu$  について辺々加え合わせる。左辺の和  $\sum \sum \angle A_{ij}$  を加え合わせる順序を変えて、まず  $\Delta$  の各頂点について加えれば、 $2\pi$  となり、全体で  $\lambda$  個の  $\Delta$  の頂点について総和すれば

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_i} \angle A_{ij} = 2\lambda \pi \quad \dots (10)$$

を得る。右辺において

$$\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \text{ の面積}) = \text{球の表面積} = 4\pi \quad \dots (11)$$

また、 $\Delta$  の各辺は 2 度ずつ数えられるのであるから

$$2\mu = \sum_{i=1}^{\nu} n_i$$

となり、したがって

$$\sum_{i=1}^{\nu} (n_i - 2) \pi = (2\mu - 2\nu) \pi = 2(\mu - \nu) \pi \quad \dots (12)$$

を得る。よって(10) (11) (12) より

$$2\lambda \pi = 4\pi + 2(\mu - \nu) \pi$$

$$\lambda = 2 + \mu - \nu$$

$$\therefore \lambda - \mu + \nu = 2 \quad \text{(証明終)}$$

2. つぎに

球に対してもオイラーの定理が成り立つことを示す。

第一段として、凸多面体として正四面体を選んで、前章で示した球面への射影をとると、正四面体の正三角形が球面三角形に変換される(図 7)。

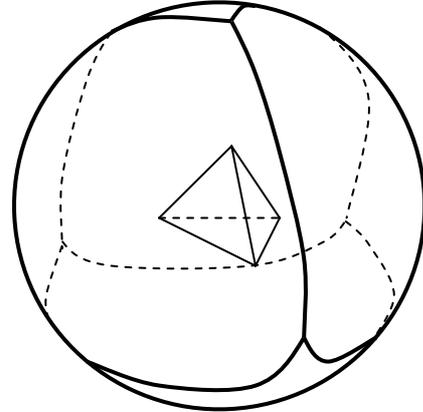


図 7. 正四面体の球面への射影

それぞれの球面三角形を分割する。まず、球面三角形  $ABC$  内に頂点  $O$  を置き、辺  $AB, BC, CA$  の中点を  $D, E, F$  とし、頂点  $O$  から頂点  $A, B, C, D, E, F$  に大円の弧となるように結ぶ。これで球面三角形は 6 分割される(図 8)。

そして、この球面分割を球に内接する凸多面体に変換するために、すべての頂点はそのまま球面上に置き、球面上の各辺と面に対応するように内接凸多面体を作る。これで球に内接する凸 24 面体を得る。

第二段として、この凸 24 面体を第一段と同じように球面へ射影し球面を 24 個の球面三角形に分割する。それぞれの球面三角形を第一段のように 6 分割し、球に内接する凸 144 面体を得る。

このような操作を  $n$  回繰り返しても球に内接する凸多面体であるのでオイラーの定理よりオイラー標数は 2 となる。この操作をさらに  $n \rightarrow \infty$  すると、この凸多面体は球に限りなく近づくので、球についてもオイラー標数は 2 となることを示せた。

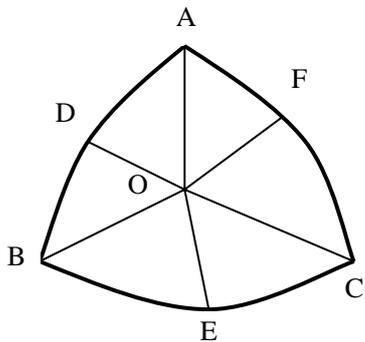


図 8. 球面三角形の分割

### 3. まとめ

これは、今年度、大学に於ける社会貢献事業として中学生を対象にした夏休み自由研究お助け隊に参加したときの課題について報告したものである。

これまでオイラーの定理の証明とそれが球に対しても成り立つことを示したが、これに興味を持たれて更に知識を深めたい方は、多様体論に進むと良いと思います。その際、集合論、特に群論についての知識があるとその理解は飛躍的に速くなります。そして読者が、これを良き道具として使いこなし多くの利益を得ることを期待しています。

### 参考文献

- [1] 河田敬義. 位相数学 基礎数学講座 21 巻, 共立出版株式会社 (1976) 1-129.